CONCOURS D'ADMISSION À L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1987 — CONCOURS SCIENCES

MATHÉMATIQUES I

Options M, P, T, TA

DURÉE : 4 heures

Calculatrice électronique autorisée.

Les notations $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ont leurs significations usuelles; $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des nombres naturels distincts de 0 et $\mathbb{Z}^*$ le complémentaire de 0 dans $\mathbb{Z}$.

Le but du problème est l'étude de quelques propriétés liées aux séries de Fourier.

Dans toute la suite E est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodiques et C^0 par morceaux.

Si f est un élément de E, la suite $(C_m(f))_{m\in\mathbb{Z}}$ définie par : $\forall m \in \mathbb{Z}$, $C_m(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-imx}\, dx$

est dite suite des coefficients de Fourier exponentiels de f.

Les première et deuxième parties sont, dans une large mesure, indépendantes.

PREMIÈRE PARTIE

I.1. Soit f une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodique, et soient $C_m(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-imx}\, dx$ ses coef ficients de Fourier.

Pour N entier naturel, on désigne par P_N l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$P_N(x) = \sum_{m=-N}^{N} C_m(f)\, e^{imx}, \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}.$$

Montrer : $$\int_0^{2\pi} |f(x) - P_N(x)|^2\, dx = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx - 2\pi \sum_{m=-N}^{N} |C_m(f)|^2.$$

En déduire :

i. Chacune des séries : $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} |C_m(f)|^2$, $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} |C_{-m}(f)|^2$ converge;

i.i. $$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |C_m(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx.$$

Désormais, et dans toute la suite du problème, on admettra, sans démonstration, que pour tout f de E, on a la relation :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |C_m(f)|^2.$$

I.2. Dans cette question, f désigne une application $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, *continue* et C^1 par morceaux; on note φ la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie en tout x de $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = f'(x)$ si f est dérivable en x et $\varphi(x) = 0$ si f n'est pas dérivable en x.

a. Comparer, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $C_n(f)$ et $C_n(\varphi)$.
Que vaut $C_0(\varphi)$?

b. Justifier la convergence des séries : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 |C_n(f)|^2$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 |C_{-n}(f)|^2$.

Tournez la page S. V. P.

c. Que vaut : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^3 \left(| C_n(f) |^3 + | C_{-n}(f) |^3 \right)$?

I.3. k **est, dans toute cette question, un élément de** $\mathbb{N}$**, donné.**

a. **Soit** f **une application de** $\mathbb{R}$ **dans** $\mathbb{C}$**,** 2π**-périodique et** C^k**.**

Montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^{2k} | C_n(f) |^2$ **et** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2k} | C_{-n}(f) |^2$ **convergent.**

En déduire la convergence des séries : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{k-1} | C_n(f) |$ **et** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{k-1} | C_{-n}(f) |$.

b. **Soit** $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ **une suite de** $\mathbb{C}$ **telle que les séries** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^k | \alpha_n |$ **et** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^k | \alpha_{-n} |$ **convergent.**

Montrer l'existence et l'unicité d'une fonction g**,** C^k**,** 2π**-périodique de** $\mathbb{R}$ **dans** $\mathbb{C}$**, vérifiant :**

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad C_n(g) = \alpha_n .$$

I.4. *a.* **Dans cette question, on suppose donnée une fonction** f **de** $\mathbb{R}$ **dans** $\mathbb{C}$**, continue,** 2π**-périodique, et** C^1 **par morceaux, de valeur moyenne nulle, c'est-à-dire vérifiant :**

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = 0 .$$

On convient, par abus de notation, de désigner par f' **la fonction** φ **définie à la deuxième question.**

Exprimer les intégrales $\displaystyle\int_0^{2\pi} | f(x) |^2 \, dx$ **et** $\displaystyle\int_0^{2\pi} | f'(x) |^2 \, dx$ **à l'aide des coefficients de Fourier exponentiels de** f.

En déduire l'inégalité (W) : $\displaystyle (W) : \left(\int_0^{2\pi} | f(x) |^2 \, dx \leqslant \int_0^{2\pi} | f'(x) |^2 \, dx \right)$.

Montrer que l'inégalité (W) est une égalité si et seulement si il existe a **et** b **dans** $\mathbb{C}$ **tels que:**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a \cos x + b \sin x .$$

b. Application géométrique.

Dans le plan $\mathbb{R}^2$ rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé, on note (Γ) une courbe paramétrée de classe C^1, régulière, fermée et sans point multiple.

On admet qu'elle partage $\mathbb{R}^2$ en deux régions : l'une, bornée, est dite partie intérieure à (Γ); l'autre, non bornée, est l'extérieure à (Γ).

l désigne la longueur de (Γ) et λ l'aire du domaine intérieur à (Γ); s est l'abscisse curviligne sur l'arc (Γ) avec $s \in [0,\ l]$.

On note $(x(t), y(t))$ où $t = \dfrac{2\pi s}{l}$ les coordonnées dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du point courant de (Γ). On définit ainsi le paramétrage :

$$\begin{aligned} [0;\ 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow M(t) = (x(t), y(t)) . \end{aligned}$$

Que vaut alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} (xy' - yx')(t)\, dt$, x' et y' représentant selon l'usage les dérivées des fonctions x et y?

Tournez la page S. V. P.

— 3 —

Justifier l'inégalité : $\left| \int_0^{2\pi} (xy' - yx')(t)\, dt \right| \leqslant \int_0^{2\pi} \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$.

On suppose : $\int_0^{2\pi} x(t)\, dt = \int_0^{2\pi} y(t)\, dt = 0$.

Montrer l'inégalité (I) : (I) : $4\pi\lambda \leqslant l^2$.

Caractériser, géométriquement, les cas où l'inégalité (I) est une égalité.

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie, on se propose, à partir de deux exemples, d'établir quelques propriétés des séries trigonométriques en relation avec les coefficients de Fourier qui les définissent.

II.A. *Exemple 1.*

1. Soient a et b deux réels, avec $a < b$, et f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$.

   a. Si on suppose f en escalier sur $[a, b]$, montrer : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lim_{|\lambda| \to +\infty} \int_a^b f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx = 0$.

   b. En déduire, pour f C^0 par morceaux : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lim_{|\lambda| \to +\infty} \int_a^b f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx = 0$.

2. *a.* Si x est un nombre réel, $x \in]0, \pi]$, et N un élément de $\mathbb{N}^*$, montrer que la somme $\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n}$ est la partie réelle de : $x \cdot \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{N} e^{inxu} \right) du$.

   En déduire : $\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n} = -\frac{x}{2} + \int_0^{\left(N+\frac{1}{2}\right)x} \frac{\sin u}{u}\, du + \int_0^{\frac{x}{2}} \sin((2N+1)u)\, \delta(u)\, du$

   où δ est l'application de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\delta(0) = 0$ et $\delta(u) = \frac{1}{\sin u} - \frac{1}{u}$ si $0 < u \leqslant \frac{\pi}{2}$.

   b. Établir la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$, puis, en utilisant ce qui précède, montrer :

   i. : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$ converge ;

   i,i. : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{\pi}{2}$,

   i,i,i. : $\forall x \in]0, \pi]$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}$,

   i,i,i,i. : $\exists M > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n} \right| \leqslant M$.

   Tracer le graphe de la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

Tournez la page S. V. P.

Cette fonction est-elle un élément de E? En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

II.B. *Exemple 2.*

1. Justifier, pour tout réel x, la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$.

   Montrer que la fonction f définie par : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ est continue.

2. Soit x un réel, $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et N la partie entière du réel $\frac{\pi}{2x}$.

   a. Établir que pour tout $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin u \geqslant \frac{2}{\pi} u$ puis justifier l'inégalité : $\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n^2} > -\frac{2}{\pi} \operatorname{Log} x$

   où Log x désigne le logarithme népérien de x.

   b. **Montrer l'inégalité :** $\left| \frac{1}{x} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^2} \right| < \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$.

   c. En déduire que f n'est pas dérivable en $x = 0$.

---==oOOo==---